Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Eignung
ausländischer Studienbewerber für ein
Hochschulstudium Mathematik –

Hilfsmittel: Tafelwerk, einsprachiges Wörterbuch, nichtgrafikfähiger Taschenrechner

---

–

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = e^x\left(2 - \frac{1}{2}x\right)$; $(x \epsilon R)$

1.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion f und die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen mit der Ordinatenachse an. Treffen Sie eine wahre Aussage zum Verhalten der Funktion f an den Grenzen ihres Definitionsbereiches! Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes und geben Sie die Art des Extremums an! Weisen Sie nach, dass der Graph dieser Funktion genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an! Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im vorgegebenen Koordinatensystem!

1.2 Gegeben ist weiterhin die Funktion F durch $F(x) = e^x(2{,}5 - 0{,}5x)$; $(x \epsilon R)$.
Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist! Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion der Funktion f, deren Graph den Graphen von f auf der Ordinatenachse schneidet! Berechnen Sie auch eine Maßzahl für die Fläche, die von den Koordinatenachsen und dem Graphen der Funktion f vollständig begrenzt wird!

1.3 Für jedes $u\ (u \epsilon R \wedge 0 < u < 4)$ existiert ein Punkt $C_u(u|f(u))$. Die Punkte $A(-1|0), B(4|0)$ und C_u sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C_u so, dass der Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks maximal wird, und geben Sie diesen Flächeninhalt an!

1.4 Im Punkt $R(0|f(0))$ wird die Tangente t an den Graphen der Funktion f gelegt. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente!

1.5 Die Gerade g mit der Gleichung $y = g(x) = 1{,}5x + 2$ berührt im Punkt $R(0|f(0))$ den Graphen der Funktion f. Sie berührt in diesem Punkt gleichzeitig einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem positiven Teil der Abszissenachse liegt. Geben Sie den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises an!

Aufgabe 2

2.1 Eine schiefe Pyramide hat eine quadratische Grundfläche $OABC$. Die Spitze S dieser Pyramide liegt senkrecht über dem Koordinatenursprung O. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt $a = 8\,cm$ und die Länge der Höhe dieses Körpers $h = 6\,cm$.

2.1.1 Legen Sie die Pyramide so in ein Koordinatensystem, dass der Punkt S auf der z –Achse liegt! Fertigen Sie eine Skizze an (Arbeitsblatt), und geben Sie dann die Koordinaten der fünf Eckpunkte der Pyramide an!

2.1.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Seite $\overline{AS}$ und berechnen Sie die Größe des Winkels $\measuredangle BMC$!

2.1.3 Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes Q, der auf der Grundkante $\overline{OC}$ liegt so, dass der Winkel $\measuredangle QMB$ ein rechter Winkel wird!

2.1.4 Der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche sei Mittelpunkt eines Kreises, der die vier Seitenkanten der Grundfläche berührt. Stellen Sie die Gleichung dieses Kreises auf!

2.2 Ein Tetraeder ist durch die Punkte $A(2|0|0), B(4|6|-1), C(0|4|2)$ und $D(3|2|5)$ gegeben. Weiterhin ist die Gerade g mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $(t \epsilon R)$ bekannt.

2.2.1 Ermitteln Sie für die Ebene E, die durch die Punkte A, B und C bestimmt ist, eine Parametergleichung und eine parameterfreie Gleichung an!

2.2.2 Die Gerade g schneidet die Ebene E im Punkt S. Geben Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes an und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Gerade g die Ebene E schneidet!

2.2.3 Zeichnen Sie Gerade g und den Tetraeder in ein gemeinsames Koordinatensystem (Arbeitsblatt)!

2.2.4 Welchen Abstand hat der Punkt D von der Ebene E und wie groß ist das Volumen dieses Tetraeders?

Aufgabe 3

3.1 Gegeben ist eine Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{2n(n-1)}{n^2+3}$ $(n \in N\backslash\{0\}$.

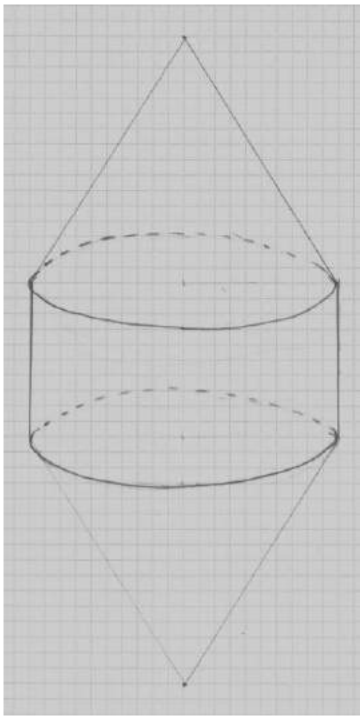
3.1.1 Berechnen Sie die ersten vier Glieder dieser Folge und treffen Sie eine allgemeingültige Aussage zu ihrer Monotonie!

3.1.2 Ermitteln Sie den Grenzwert der Zahlenfolge (a_n)!

3.1.3 Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n_0 so, dass die Glieder a_n für $n>n_0$ in der ε-Umgebung des Grenzwertes liegen, wenn $\varepsilon = 10^{-2}$ ist!

3.2 Für welchen Wert von a (a>3) hat die Maßzahl der Fläche zwischen dem Grafen von f und der Abszissenachse ein lokales Extremum, wenn f gegeben ist durch $f(x) = ax - \frac{1}{9}(a-3)\,x^3$?
Um was für ein Extremum handelt es sich und wie groß ist es?

3.3 Eine Boje zur Markierung von Wasserstraßen besteht aus einem zylindrischen Teil mit zwei angesetzten gleichgroßen Kegeln.
Die Mantellinie s jedes Kegels hat eine Länge von 5 dm. Der zylindrische Teil hat ein Volumen von 45 πdm³. Aus Kostengründen soll die Außenfläche der Boje minimal werden. Berechnen Sie für diesen Fall den Radius und die Höhe des zylindrischen Teils!



Erwartungshorizont

Aufgabe 1

1.1	Nullstelle, S_y, Grenzwerte	4 P
	Ableitungen, H, W	9 P
	Grafik	6 P
1.2	Nachweis Stammfunktion, C_0	5 P
	Maßzahl	3 P
1.3	Dreieck, C_u, Inhalt	10 P
1.4	Tangente t	3 P
1.5	Mittelpunkt, Radius	5 P
Summe		**45 P**

Aufgabe 2

2.1.1	Skizze, Koordinaten	10 P
2.1.2	Mittelpunkt, Winkel	5 P
2.1.3	Koordinaten von Q	5 P
2.1.4	Kreisgleichung	3 P
2.2.1	Ebene E	6 P
2.2.2	Punkt S, Winkel	6 P
2.2.3	Zeichnung	6 P
2.2.4	Abstand, Volumen	6 P
Summe		**47 P**

Aufgabe 3

3.1.1	Glieder, Monotonie	4 P
3.1.2	Grenzwert	1 P
3.1.3	n_0 bestimmen	3 P
3.2	$a \epsilon R$ und Extremum	10 P
3.3	Mantelfläche (Minimum)	10 P
Summe		**28 P**

Gesamtsumme: 120 P